

תופעות במימד גבוה

גלי ליבשיץ

מכון טכנולוגי של ג'ורג'יה (מבקרת את הטכניון)

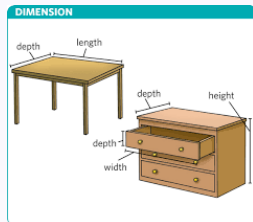
טכניון, חיפה

נובמבר 2025

עובדות משעשעות

מה זה ממד?

אנחנו חים בחלל שיש בו שלושה ממדים:

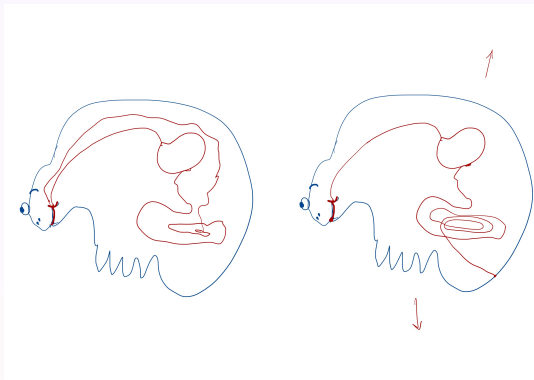


האם אפשר לדמיין את חלל עם רק שתי ממדים? חשבו על צללים שיש להם רוחב וגובה אבל אין עומק!



עובדה משעשעת על דו-ממד

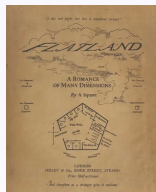
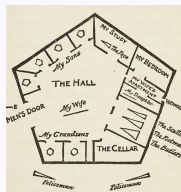
עובדה משעשעת (קשור אליו דרך אסיה, המורה שלי למעגלי מתמטיקה)
אם יצור היה חי במרחב דו-ממדי, הוא היה צריך לאכול ולהפריש דרך אותו פתח...



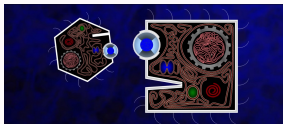
אחרת הוא היה מתפרק!

אדוין אבוט אבוט, "ארץ-שטוחה: רומן בריבוי ממדים", 1884

- "ארץ-שטוחה" הוא ספר על חיים בשני ממדים, שמסופר על ידי ריבוע. הדמויות הן משולשים, ריבועים, מצולעים, מעגלים ואחרות.

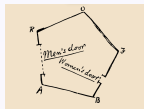


- האינטליגנציה היא במידת-מה פרופורציונית לאווית הקטנה ביותר; וגם – ככל שיש לייצור יותר צלעות, כך הוא נחשב חכם יותר.
- לבנים של מצולע בעל N צלעות יש $N+1$ צלעות; ולכן הכלל: "כבד את ילדיך".
- מעגלים הם החכמים ביותר, הארץ נשלטת על ידי מעגל ראשי, הכוהנים הם מעגלים, בעוד שהחיילים הם הפחות חכמים והם משולשים גבוהים.

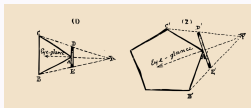


אדוין אבוט, "ארץ-שטוחה: רומן בריבוי ממדים", 1884

- נשים הן קווים ישרים (קטעים). נשים אמורות לנוע מצד לצד כל הזמן כדי להיראות. לגברים ולנשים יש כניסה נפרדת למגורים.



- כל הגברים נתפסים כקטעים; צורתם מוסקת על ידי חוש המישוש. לחלופין, ניתן להבין את הצורה על ידי התבוננות בהם ב"ערפל" שגורם לנקודות רחוקות להיראות עמומות יותר.



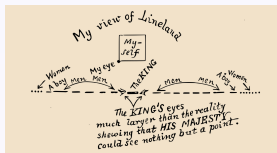
- על פי אבוט, אפשר ללמוד צורה על ידי הליכה סביבה... אך זה לא מדויק:



- שאלה: אם הצורות חייבות להיות פוליגונים, האם נוכל לקבוע את המבנה שלהן על ידי תנועה סביבן ומדידת אורכי כל ההטלות?

אדוין אבוט אבוט, "ארץ-שטוחה: רומן בריבוי ממדים", 1884

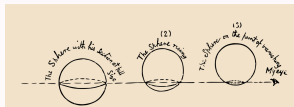
- המספר (הריבוע) מקבל את "הבשורה של שלושת הממדים" לילה לפני כן, הוא חולם על... ארץ הקווים!



- בארץ הקווים, כל היצורים הם קטעים, מתקשרים באמצעות מספר קולות; לקיום יחסי מין, אין צורך בקרבה
- הריבוע מנסה להסביר למלך הקו שהוא דו-ממדי על ידי היעלמות מארץ הקווים:

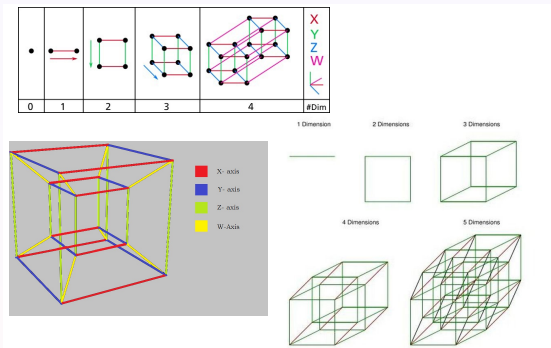


- מאוחר יותר, מוסבר לו חלל תלת-ממדי על ידי כדור שמשמש באותו הטרק:



עובדות משעשעות על 4 ממדים

באופן דומה, אולי נוכל לנסות ולהבין 4 ממדים דרך יישום החוויה שלנו של הסתכלות על 2 ממדים מעולמנו התלת-ממדי?



דמיינו: אם אנחנו (כיצורים תלת-ממדיים) היינו חיים ב-4 ממדים, היינו יכולים לגעת באיברים הפנימיים אחד של השני!

עובדות משעשעות על 4 ממדים

בנוסף, אם אנחנו (כיצורים תלת-ממדיים) היינו חיים בארבעה ממדים, כך היה נראה זוג נעליים:



חשבו למה?

עובדות משעשעות על 4 ממדים

בנוסף, אם אנחנו (כיצורים תלת-ממדיים) היינו חיים בארבעה ממדים, כך היה נראה זוג נעליים:



חשבו למה?

כמו שאנחנו יכולים להזיז את התמונה השמאלית (למטה) ימינה באמצעות החופש של 3 ממדים,



הרגליים שלנו היו זהות בארבעה ממדים, ולכן היינו יכולים לנעול מגף שמאלי על רגל ימין!

איך להבין ממדים גבוהים?

תחשוב על ספר פלאפונים:



אוסף תמונות ב-2D יוצר ספר ב-3D; כאשר מדפדפים בו, הוא יוצר סרט שטוח קטן!

באופן דומה, כאשר החלל שלנו $\mathbb{R}^3$ הוא יוצר תמונה תלת-ממדית. $\mathbb{R}^3$ זמן יכול להראות כמו ממד הרביעי!

מה לגבי חלל 5-ממדי?

איך להבין את ממדים רבים?

תחשוב על ספר פלאפונים:



אוסף תמונות ב-2D יוצר ספר ב-3D; כאשר מדפדפים בו, הוא יוצר סרט שטוח קטן!

באופן דומה, כאשר החלל שלנו z בזמן, הוא יוצר תמונה תלת-ממדית. זמן יכול להראות כמו ממד הרביעי!

מה לגבי חלל 5-ממדי?

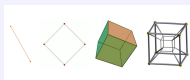


גם ספר טוב:

טד צ'יאנג, "חרדה היא סחרחורת החופש".

קובייה ארבע-ממדית נקראת טסרקט

קטע, ריבוע, קובייה... **טסרקט!**

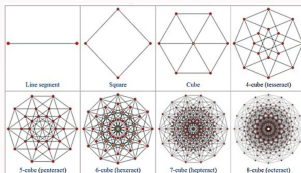


כדי להבין את הטסרקט (הקובייה בעלת 4 ממדים) דמיינו שהקובייה נופלת לעברכם, כפי שנראה בתמונה למעלה מימין.

בתרבות

- רוברט היינליין, "והוא בנה בית עקום", על בית שנבנה כטסרקט תלת-ממדי שנפרס ואשר בטעות מתקפל חזרה במהלך רעידת אדמה
- מופיע בעולם של מארוול, גם בסרט "בין כוכבים"

ממדים נוספים (ראו גם תוספים):

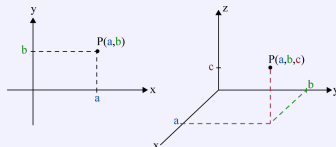


הגדרות מתמטיות

מבחינת מתמטיקה...

בנוסף אפשר לדמיין את חלל ארבע-ממדי כמו צפיפות חומרים כפרמטר הרביעי, בנוסף לרוחב, אורך וגובה.

מבחינה מתמטית, נקודה בחלל דו-ממדי היא זוג קאורדינטות (a, b) . נקודה בחלל תלת-ממדי היא (a, b, c) . בחלל 4 ממדי - (a, b, c, d) .

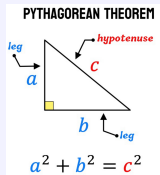


מספר רב של פרמטרים או משתנים עשויים להידרש כדי לתאר מערכת. באוכלוסייה אנושית, הם עשויים לכלול גובה, משקל, גיל, מגדר, מספר שפות מדוברות, צבע עיניים (מוזכר לפי מספר), צבע שיער, ...

נקודת מבט גיאומטרית, הנובעת מהאינטואיציה הגיאומטרית שלנו במרחב דו-ממדי ותלת-ממדי, עשויה לעזור לנו לחקור מערכות מורכבות בממדים גבוהים.

מרחקים בממדים גבוהים

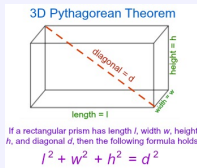
משפט פיתגורס במישור



משפט פיתגורס בחלל

המרחק מהראשית לנקודה $x = (x_1, \dots, x_n)$ הוא

$$\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$



If a rectangular prism has length l , width w , height h , and diagonal d , then the following formula holds:

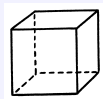
$$l^2 + w^2 + h^2 = d^2$$

קובייה וכדור רב-ממדיים

קובייה רב-ממדית

קובייה מוגדרת

$$B_{\infty}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \text{for all } i, |x_i| \leq 1\}$$

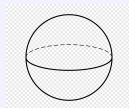


אורך הצלע של הקובייה הזו הוא 2

כדור רב-ממדי

כדור מוגדר

$$B_2^n = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq 1 \right\}$$



ממדיות מוזרה

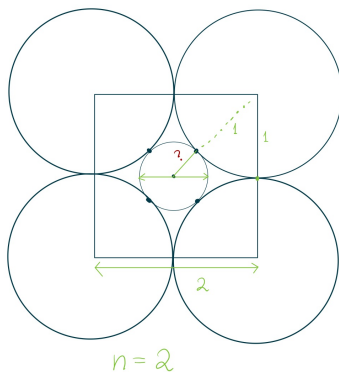
מעטה ואילך נחשוב על הממד

$$n = 1000000$$

או, באופן כללי יותר, תנו לזה להיות מספר גדול מאוד! מתברר כי מימדים גבוהים יותר לפעמים מציגים פשטות רבה יותר במקום מורכבות.

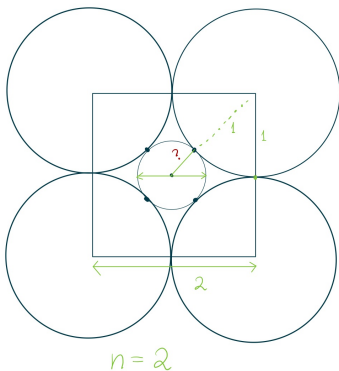
תופעה רב-ממדית מוזרה #1

מה האורך של הקטע במימד $n = 2$?



תופעה רב-ממדית מוזרה #1

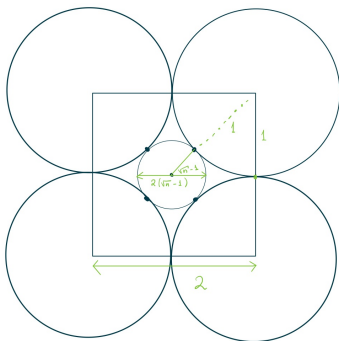
הוא $\sqrt{2}-1 \approx 0.4$.



$$? = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4$$

תופעה רב-ממדית מוזרה #1

ומה בממד n ?

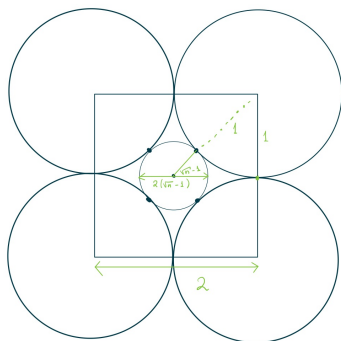


n — large number

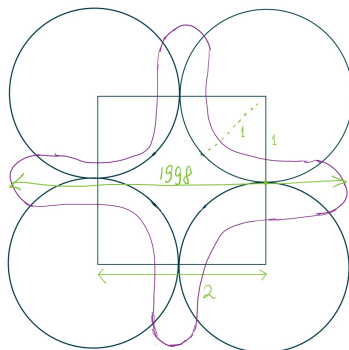
$$\text{radius} = \sqrt{n} - 1$$

תופעה רב-ממדית מוזרה #1

הכדור זולג החוצה!



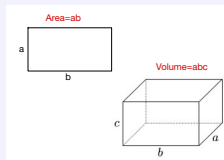
n — large number



$n = 1000000$

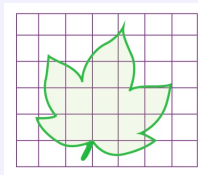
שטח, נפח, מידה לבג

שטח של מלבן ונפח של מקבילון



שטח של קבוצה (מידת לבג)

דמיינו קבוצה על רשת מאוד עדינה וספרו כמה ריבועי רשת הקבוצה מכסה; לאחר מכן הוסיפו את שטחיהם (שאותם אנו יודעים למצוא - ראו למעלה). זה נותן קירוב לשטח הקבוצה.



המצב בממדים גבוהים הוא אותו הדבר!

הומוגניות של הנפח הלבגי בממד n

תכונת הומוגניות של נפח

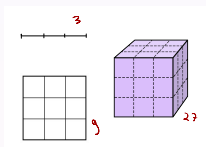
לקבוצה A ב $\mathbb{R}^n$,

$$\text{Vol}_n(5A) = 5^n \text{Vol}_n(A).$$

כאן $5A = \{5x : x \in A\}$.

באופן יותר מוכלל, אם $t > 0$

$$\text{Vol}_n(tA) = t^n \text{Vol}_n(A).$$



נפח קוביית היחידה B_∞^n

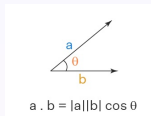
$$\text{Vol}_n(B_\infty^n) = 2^n.$$



סקירה של מכפלה סקלרית והיטל

נגיד a ו- b וקטורים, נגדיר מכפלה סקלרית:

$$\langle a, b \rangle = |a| \cdot |b| \cdot \cos(a, b),$$



בקאורדינטות, אם $a = (a_1, \dots, a_n)$ ו- $b = (b_1, \dots, b_n)$

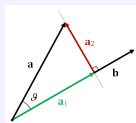
$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n.$$

היטל

אם $|b| = 1$ אז

$$\langle a, b \rangle = |a| \cos(a, b)$$

זה אורך ההטלה של a על b .



חוק המספרים הגדולים ומשפט הגבול המרכזי

חוק המספרים הגדולים

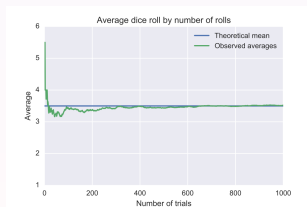
חוק המספרים הגדולים

נקח $X_1, \dots, X_n$ - משתנים אקראיים בלתי תלויים עם $\mathbb{E}X_i = E$. אז

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E$$

במובן הנכון.

במילים אחרות, אם לוקחים כרטיס הממוספר 1, 2, 3 מתוך כובע, ומחשבים את הממוצע של המספרים, לאחר 10000 ניסויים כמעט בוודאות תקבלו משהו קרוב מאוד ל-2 (כי $\frac{1+2+3}{3} = 2$).



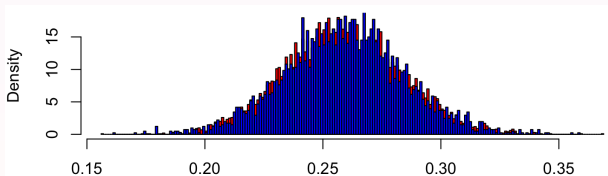
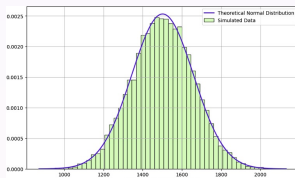
משפט הגבול המרכזי

משפט הגבול המרכזי

נקח $X_1, \dots, X_n$ משתנים אקראיים בלתי תלויים עם שונות חסומה ו $\mathbb{E}X_i = E$. אז

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Normal distribution}$$

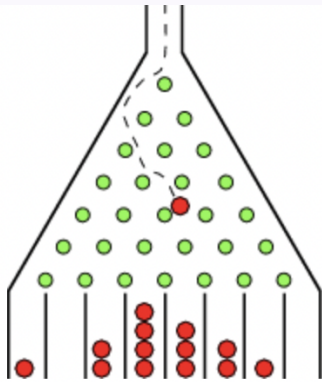
במובן הנכון.



משפט הגבול המרכזי

לוח גלטון

דמיינו אוסף חרוזים נופלים למטה ומשתקפים אקראית ימינה או שמאלה בכמה רמות. כל השתקפות היא ± 1 משתנה מקרי X_i , ומיקום החרוז הוא סכום ממוצע של ה X_i .



פרשנות גיאומטרית של חוק המספרים הגדולים ומשפט הגבול המרכזי

משפט הגבול המרכזי

נקח $X_1, \dots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים אחידים על $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. נסתכל על הווקטור $X = (X_1, \dots, X_n)$. הוא מתפלג באופן אחיד בתוך הקוביה $Q = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$.



נתבונן במשתנה המקרי

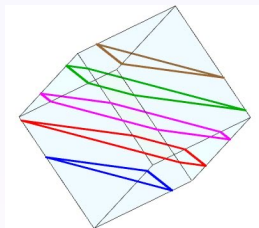
$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} = \langle X, \theta \rangle,$$

$$\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \text{ שימו לב כי}$$

$$|\theta| = \sqrt{\theta_1^2 + \dots + \theta_n^2} = \sqrt{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}} = 1,$$

ואז $\langle X, \theta \rangle$ הוא היטל של X על הכיוון θ .

פרשנות גיאומטרית של חוק המספרים הגדולים (LLN) ומשפט הגבול המרכזי (CLT)

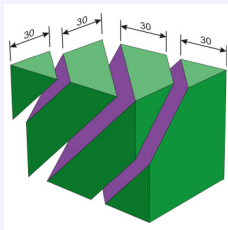


הצפיפות של המשתנה האקראי $\langle X, \theta \rangle$ is

$$f_{\langle X, \theta \rangle}(t) \approx \frac{1}{\epsilon} P(\langle X, \theta \rangle \in [t, t + \epsilon]) \approx \text{Vol}_{n-1}(Q \cap H_t),$$

- פונקציית המסטע של הקוביה, פה H_t הוא היפרמישור $(n-1)$ -ממדי שהוא מרחק t מהראשית.
לכן, מ-CLT,

$$\text{Vol}_{n-1}(Q \cap H_t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Normal distribution},$$

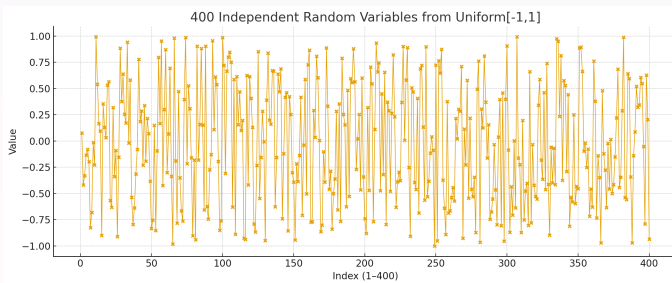
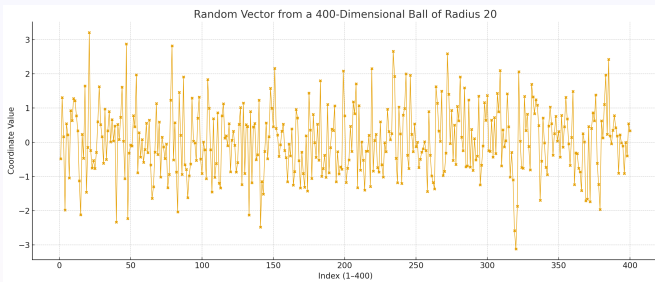


כמו כן, על פי חוק המספרים הגדולים, ישנו לוח צר מספיק S אורתוגונלי ל $\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ כך ש

$$\text{Vol}_n(S \cap Q) = 99\% \text{ of the cube.}$$

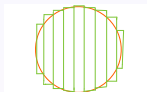
כדור בממד גבוה

וקטור אקראי מכדור vs קוביה



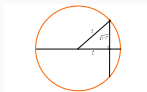
נפח הכדור ב- n ממדים

ניתן למצוא את נפח כדור היחידה B_2^n ב- $\mathbb{R}^n$ באמצעות משפט פוביני: יש לקרב את הכדור באמצעות איחוד של פרוסות כדור דקות רבות B_i , ואז



$$\text{Vol}_n(B_2^n) \approx \sum \text{Vol}(B_i) \approx \int_{-1}^1 \text{Vol}_{n-1}(B_t) dt,$$

פה B_t הוא כדור ב- R^{n-1} עם רדיוס $\sqrt{1-t^2}$.



באמצעות הומוגניות,

$$\text{Vol}_{n-1}(B_t) = \text{Vol}_{n-1}\left(\sqrt{1-t^2} B_2^{n-1}\right) = (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} \text{Vol}_{n-1}\left(B_2^{n-1}\right).$$

לכן,

$$\text{Vol}_n(B_2^n) = \text{Vol}_{n-1}\left(B_2^{n-1}\right) \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt.$$

נפח הכדור ה- n -ממדי

$$Vol_n(B_2^n) = Vol_{n-1}(B_2^{n-1}) \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt.$$

נקח

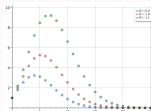
$$J_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt,$$

ורואים:

$$Vol_n(B_2^n) = J_n \cdot Vol_{n-1}(B_2^{n-1}) = J_n \cdot J_{n-1} \cdot Vol_{n-2}(B_2^{n-2}) = \dots = J_n \cdot J_{n-1} \cdot \dots \cdot J_1.$$

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	n Dim
$\frac{\pi^6}{720}$	$\frac{64\pi^5}{10395}$	$\frac{\pi^5}{120}$	$\frac{32\pi^4}{945}$	$\frac{\pi^4}{24}$	$\frac{16\pi^3}{105}$	$\frac{\pi^3}{6}$	$\frac{8\pi^2}{15}$	$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	π	2	$Vol_n(B_2^n)$
1.34	1.88	2.55	3.30	4.06	4.73	5.17	5.27	4.93	4.19	3.14	2	$\approx$

הנפח של כדור היחידה B_2^n יורד במהירות לאפס ככל שהממד עולה $n \rightarrow \infty$:



נפח הכדור ב- n ממדים

$$\frac{Vol_n(B_2^n)}{Vol_n(B_2^{n-1})} = J_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}$$

כאשר $n \rightarrow \infty$. יותר במדויק,

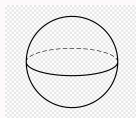
$$Vol_n(B_2^n) \approx \left(\frac{2\pi e}{n} \right)^{\frac{n}{2}},$$

שיורד לאפס מהר מאוד! לכן,

$$Vol_n(R_n B_2^n) = 1$$

כאשר $R_n \approx 0.242\sqrt{n}$.

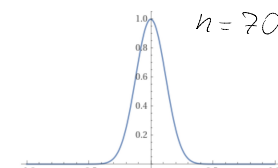
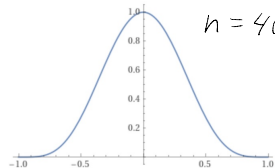
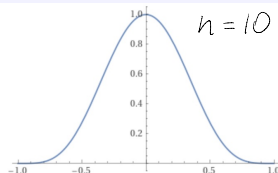
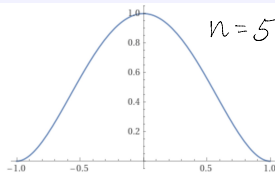
בממד 1000000, לכדור מנפח 1 יש רדיוס בערך 242.



נפח הכדור ב- n ממדים

נתמקד ב-

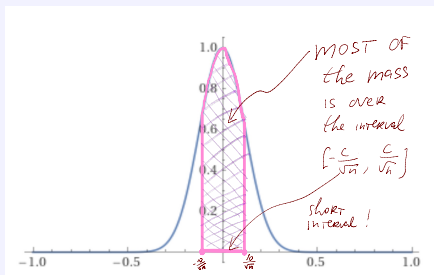
$$\frac{\text{Vol}_n(B_2^n)}{\text{Vol}_n(B_2^{n-1})} = J_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}.$$



המסה מתחת לגרף הופכת להיות יותר ויותר מרוכזת סביב הפסגה!

נפח הכדור ב- n ממדיםנגיד $n \geq 1000$.

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \approx \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt \geq \int_{-\frac{10}{\sqrt{n-1}}}^{\frac{10}{\sqrt{n-1}}} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt \geq \frac{20 \left(1 - \frac{100}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n-1}} = \frac{c}{\sqrt{n}}.$$



לכן

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt \leq C \int_{-\frac{10}{\sqrt{n-1}}}^{\frac{10}{\sqrt{n-1}}} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt.$$

ריכוז בכדור ה- n -ממדינגיד $n \geq 1000$

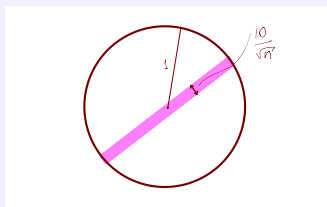
יהי

$$B = \left\{ x \in B_2^n : |x_1| \leq \frac{10}{\sqrt{n}} \right\}.$$

אז

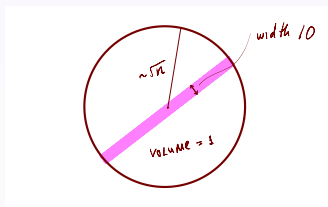
$$\text{Vol}_n(B) = \text{Vol}_{n-1}(B_2^n) \int_{-\frac{10}{\sqrt{n-1}}}^{\frac{10}{\sqrt{n-1}}} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt \geq$$

$$0.99 \text{Vol}_{n-1}(B_2^n) \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt = 0.99 \text{Vol}_n(B_2^n).$$



ריכוז בכדור n -ממדי

99% מהנפח של הכדור האוקלידי ברדיוס 1 ב- $\mathbb{R}^n$ מגיע מרצועה ברוחב של סדר גודל של $\frac{1}{\sqrt{n}}$! לדוגמה, במימד 1,000,000, רוב הנפח של כדור היחידה מגיע מרצועה ברוחב 0.001 סביב קו המשווה!



אפשר גם להסתכל על התמונה המנורמלת ב- $\sqrt{n}$: 99% מהמסה של הכדור בנפח 1 (שהרדיוס שלו הוא בערך $\sqrt{n}$) מגיעה מרצועה ברוחב קבוע. זהו אילוג לחוק המספרים הגדולים - אבל ללא האי-תלות!

ריכוז בכדור n -ממדי

למרבה ההפתעה, המסה מתרכזת בעוצמה ליד **כל** קו משווה! אז איזו תמונה למטה היא כדור במימד גבוה?..



ריכוז בכדור n -ממדי

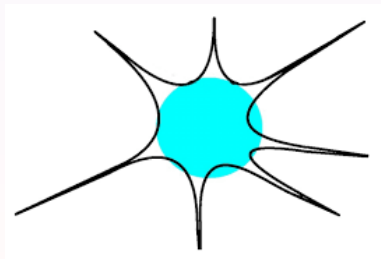
זה עשוי לגרום לאדם לחשוב שהכדור כבד במיוחד ליד המרכז... אבל זה לא נכון!

$$Shell = \left\{ x : |x| \in \left[1 - \frac{10}{n}, 1 \right] \right\}.$$

לכן

$$\begin{aligned} Vol_n(Shell) &= Vol_n(B_2^n) - Vol_n\left(\left(1 - \frac{10}{n}\right) B_2^n\right) = \\ &= \left(1 - \left(1 - \frac{10}{n}\right)^n\right) Vol_n(B_2^n) \approx 0.99 \cdot Vol_n(B_2^n). \end{aligned}$$

מרבית הנפח של הכדור נמצא $\frac{1}{n}$ -קרוב לגבול! זוהי תיאור קלאסי של כדור בממד גבוה:

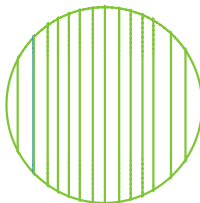
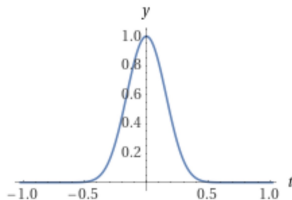


משפט הגבול המרכזי עבור הכדור

בהקבלה לפרשנות הגיאומטרית של משפט הגבול המרכזי (שאותו ראינו קודם עם הקובייה), אנו שמים לב:

CLT לכדור

הפונקצייה $|B_2^n \cap H_t|$ (כאן H_t הוא מרחק תת-מרחב t מהראשית) קרובה לגאוסיאן, בממד גבוה.

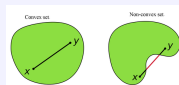


חוק המספרים הגדולים והמשפט המרכזי של הגבול
הקמור

משפט הגבול המרכזי לקבוצות קמורות

קבוצה קמורה

קבוצה K היא קמורה אם לכל $x, y \in K$, הקו המחבר את x ו- y נמצא בתוך K .



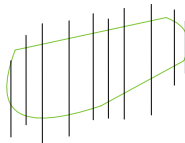
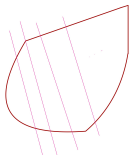
דוגמאות לקבוצות קמורות:



גרסה של משפט הגבול המרכזי נכונה עבור כל הקבוצות הקמורות K !

(Klartag Theorem (2007)

עבור כל קבוצה קמורה K ב- $\mathbb{R}^n$ קיים איזשהו כיוון שבו $Vol_{n-1}(K \cap H_t)$ "נראה כמו" ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית.



בעיית החיתוך של בורגן

חוק המספרים הגדולים עבור קבוצות קמורות

אם X אחיד ב- K , קבוצה קמורה ב- $\mathbb{R}^n$ שנפחה 1, ואם הרצועה הדקה ביותר המכילה 50% מנפח K היא מאונכת ל- $(1, 1, \dots, 1)$, האם אז $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \leftarrow$ קבוע?

התשובה היא כן (נובע מהמשפט שלמטה), אך אפשר לשאול שאלה קשה יותר: מהו הרוחב המרבי האפשרי של הרצועה הדקה ביותר המכילה 50% מנפח K ?

שאלה מקבילה: בעיית החיתוך של בורגיין, 1984

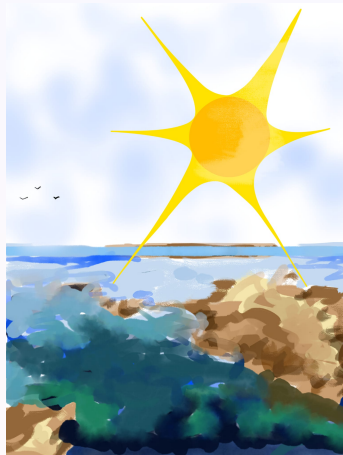
האם ל- K קמור בנפח 1 יש חתך $(n-1)$ -ממדי בעל "שטח" של לפחות $1/100$?



משפט (קלרטג, להק 2024; ביזול 2025)

כן!

תודה רבה על הסבלנות:



(ציור ע"י איתי ב.)